Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I
Profesor: Francisco Periago Esparza. Email: f.periago@upct.es

HOJA DE PROBLEMAS: INTEGRAL DE RIEMANN

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$(a)\ \int (2x-1)^3\, dx$	$(b)\ \int (4x+3)\, e^{-(2x^2+3x+1)}\, dx$	$(c)\ \int \sin(ax)\cos(ax)\, dx$
$(d)\ \int \frac{x}{2x^2+3}\, dx$	$(e)\ \int \left(x+x^2\right)^{-1/2}(1+2x)\, dx$	$(f)\ \int \frac{\log x}{x}\, dx$
$(g)\ \int \cos^2(ax)\, dx$	$(h)\ \int \sin^2(ax)\, dx$	$(i)\ \int \sin(ax)\cos(ax)\, dx$
$(j)\ \int \sin(ax)\sin(bx)\, dx$	$(k)\ \int \cos(ax)\cos(bx)\, dx$	$(l)\ \int \sin(ax)\cos(bx)\, dx$
$(ll)\ \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$	$(m)\ \int x\cos(3x)\, dx$	$(n)\ \int x^2\sin(5x)\, dx$
$(o)\ \int \sin(2x)e^{-x}\, dx$	$(p)\ \int \log x\, dx$	$(q)\ \int x^2e^{-x}\, dx$
$(r)\ \int \frac{dx}{(x-2)(3-x)}$	$(s)\ \int \frac{5x+1}{x^3-3x+2}\, dx$	$(t)\ \int \frac{dx}{x^2+2x+5}$
$(u)\ \int \frac{dx}{x^2+10x+16}\, dx$	$(v)\ \int \frac{x+2}{(x-1)(x+3)}\, dx$	$(w)\ \int \frac{3x^2+2x+7}{x^2+1}\, dx$
$(x)\ \int \frac{2x^3+9x^2+4}{x^2(x^2+4)(x-1)}\, dx$	$(y)\ \int \frac{x}{x^2+4x+5}\, dx$	$(z)\ \int \frac{dx}{x^2+4x+2}$

2. Sea $a > 0$. Calcula las siguientes integrales impropias:

$(a)\ \int_0^\infty e^{-ax}\cos x\, dx$	$(b)\ \int_0^\infty e^{-ar}r^n\, dr$	$(c)\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$
$(d)\ \int_e^\infty \frac{dx}{x\log x}$	$(e)\ \int_e^\infty \frac{dx}{x\log^2 x}$	$(f)\ \int_0^\infty x^2e^{-2x}\, dx$

3. **Derivación paramétrica de integrales.** Calcula las siguientes derivadas:

$(a)\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^3}\cos t\, dt$	$(b)\frac{d}{dx}\int_{2x}^{3x}\frac{1}{t}\, dt$	$(c)\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx$
$(d)\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} t^n\, dt$	$(e)\frac{d}{dx}\int_0^2 x^n\, dt$	$(f)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x v(t)\, dt\right)$
$(g)\frac{d}{dx}\int_0^x\left(\int_0^t v(s)\, ds\right) dt$	$(h)\frac{d}{dx}\left(\int_0^x v(t)\, dt + \int_x^1 v(t)\, dt\right)$	$(i)\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} v(t)\, dt$

4. **Derivación en el sentido de las distribuciones y la distribución delta de Dirac.** Se define la función escalón (también llamada función de Heaviside) como

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Se llama masa de Dirac centrada en 0, denotada $\delta_0(x)$, a la derivada de $H(x)$ respecto a x. Como es bien sabido, toda función derivable es necesariamente continua. Por tanto, como $H(x)$ no es continua en $x = 0$, no puede ser derivable en dicho punto, al menos en el sentido de derivación introducido por Newton. Veamos qué sentido tiene pues la afirmación anterior.

a) Sea $v : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua, con derivada continua, y de modo que $v(-1) = v(1) = 0$. Utiliza la fórmula de integración por partes para comprobar que

$$\int_{-1}^{1} H'(x)v(x)\, dx = v(0).$$

b) En el contexto de la Física Cuántica, Paul Dirac (Premio Nobel de Física en 1933 junto a Erwin Schrödinger) introdujo la distribución delta $\delta_0(x)$ atribuyéndole las dos siguientes propiedades:

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)v(x)\, dx = v(0),$$

donde v es como en el apartado anterior.

Estas dos propiedades no encajaban con las Matemáticas conocidas en 1933 pues la integral de Riemann no está definida para "funciones" que toman el valor $+\infty$. El sentido en que deben entenderse las propiedades anteriores es el siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ consideremos la función

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si} \quad -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \varepsilon \end{cases}$$

Utiliza el Teorema de la media del Cálculo Integral para comprobar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) v(x)\, dx = v(0),$$

donde v es una función como en el apartado anterior.

Teniendo en cuenta los resultados de los dos apartados anteriores, es decir,

$$\int_{-1}^{1} H'(x) v(x)\, dx = v(0) \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} \delta_0(x) v(x)\, dx = v(0) \quad \forall v,$$

podemos concluir que $H'(x) = \delta_0(x)$. Esta forma de entender las derivadas es lo que se conoce con el nombre de derivación en el sentido de las distribuciones.

5. **Algunas Aplicaciones del Cálculo Integral.** Son muchas y muy variadas las aplicaciones del Cálculo Integral en Física e Ingeniería. Se presentan a continuación algunas de ellas.

   a) Las líneas de forma en espectroscopia de resonancia magnética se describen a menudo a través de la función de Lorentz
   $$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{T}{1 + T^2 (\omega - \omega_0)^2},$$
   donde T y ω_0 son constantes. Calcula $\int_{\omega_0}^{\infty} g(\omega)\, d\omega$.

   b) La probabilidad de que una molécula de masa m en un gas a temperatura T se mueva a velocidad v está dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann
   $$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}.$$
   Calcula la velocidad media $\overline{v} = \int_0^{\infty} v f(v)\, dv$.

   c) La fuerza que actúa entre dos cargas eléctricas q_1 y q_2 separadas una distancia x en el vacío está dada por (ley de Coulomb)
   $$F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 x^2},$$
   donde ϵ_0 es la permeatividad del vacío. Calcula el trabajo ejercico por dicha fuerza para el caso de dos cargas iguales (por ejemplo dos electrones) que se repelen, es decir, calcula $W = -\int_{-\infty}^{x} F(x)\, dx$.

   d) Consideremos una barra de longitud L con densidad de masa $\rho(x) = L - x$, $0 \leq x \leq L$. Calcula la posición del centro de masas, es decir,
   $$X = \frac{\int_0^L x \rho(x)\, dx}{\int_0^L \rho(x)\, dx}$$
   y también el momento de inercia respecto al punto x_0, el cual se define como
   $$I = \int_0^L \rho(x) (x - x_0)^2\, dx.$$

Referencias

[1] E. Steiner, The Chemistry Maths book, Oxford University Press, 1996.

[2] G. Strang, Calculus, Wellesley- Cambridge Press, 1991.

Hoja de Problemas. Integral de Riemann

① a) $\int (2x-1)^3 dx = \left| \begin{array}{l} 2x-1=t \\ 2\,dx=dt \to dx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right|$

$$= \int t^3 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\frac{t^4}{4}$$

$$= \frac{1}{8}(2x-1)^4 + C.$$

b) $\int (4x+3)\, e^{-(2x^2+3x+1)} dx = \left| \begin{array}{l} 2x^2+3x+1=t \\ (4x+3)dx=dt \end{array} \right|$

$$= \int e^{-t} dt = -e^{-t} = -e^{-(2x^2+3x+1)} + C$$

c) $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(ax)\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{sen}(ax)=t \\ a\cos(ax)dx=dt \end{array} \right|$

$$= \frac{1}{a}\int t\,dt = \frac{1}{2a}t^2 = \frac{1}{2a}(\operatorname{sen}(ax))^2 + C.$$

d) $\int \frac{x}{2x^2+3} dx = \left| \begin{array}{l} 2x^2+3=t \\ 4x\,dx=dt \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t}$

$$= \frac{1}{4}\log|t| = \frac{1}{4}\log(2x^2+3) + C.$$

(e) $\displaystyle\int (x+x^2)^{-1/2}(1+2x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x+x^2 = t \\ (1+2x)\,dx = dt \end{array} \right|$

$$= \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\,t^{1/2} = 2\,(x+x^2)^{1/2} + C.$$

(f) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \log x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{array} \right| = \int t\,dt$

$$= \frac{t^2}{2} = \frac{(\log x)^2}{2} + C.$$

(g) $\cancel{\int}$

Para el cálculo de algunas integrales de funciones trigonométricas resulta muy conveniente usar las siguientes identidades:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\,(1+\cos(2x))$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\,(1-\cos(2x))$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x\cos x$$

$$\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y = \frac{1}{2}\,(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\,(\cos(x-y)+\cos(x+y))$$

$$\operatorname{sen}x\cos y = \frac{1}{2}\,(\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)).$$

g) $\int \cos^2(ax)dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2ax))dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2a}\operatorname{sen}(2ax)\right) + C_1.$

h) $\int \operatorname{sen}^2(ax)dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2ax))dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2a}\operatorname{sen}(2ax)\right) + C_1$

i) $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(ax)dx = (c) =$

$= \frac{1}{2}\int (\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(ax-ax)}}_{0} + \operatorname{sen}(ax+ax))dx$

$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2a}\cos(2ax) = -\frac{1}{4a}\cos(2ax) + C_1.$

j) $\int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)dx = \frac{1}{2}\int (\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x))dx$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a-b}\operatorname{sen}((a-b)x) - \frac{1}{a+b}\operatorname{sen}((a+b)x)\right\} + C_1.$

$a \neq b.$

k) $\int \cos(ax)\cos(bx)dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a-b}\operatorname{sen}((a-b)x) + \frac{1}{a+b}\operatorname{sen}((a+b)x)\right\}$

$+C_1$

l) $\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)dx = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a-b}\cos((a-b)x) + \frac{1}{a+b}\cos((a+b)x)\right\} + C_1$

ll) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\cos t \\ dx = -a\,\mathrm{sen}\,t\,dt \end{array} \right. \left| \; t = \arccos \frac{x}{a} \right.$

como $x^2 = a^2\cos^2 t \rightarrow a^2 - x^2 = a^2(1-\cos^2 t)$

$$= a^2\,\mathrm{sen}^2 t$$

$$= -a \int \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2 t}\cdot \mathrm{sen}\,t\,dt$$

$$= -a^2 \int \mathrm{sen}^2 t\,dt \underset{(h)}{=} -\frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2t)\right)$$

$$= -\frac{a^2}{2}\left(\arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(2\arccos\frac{x}{a}\right)\right) + C.$$

m) $\int x\cos(3x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x = u \longrightarrow dx = du \\ \cos(3x)dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3x) \end{array} \right|$

$$= \frac{x}{3}\,\mathrm{sen}(3x) - \frac{1}{3}\int \mathrm{sen}(3x)\,dx$$

$$= \frac{x}{3}\,\mathrm{sen}(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C.$$

n) $\int x^2\,\mathrm{sen}(5x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = u \rightarrow 2x\,dx = du \\ \mathrm{sen}(5x)dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{5}\cos(5x) \end{array} \right|$

$$= -\frac{x^2}{5}\cos(5x) + \frac{2}{5}\int x\cos(5x)\,dx$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = u \longrightarrow dx = du \\ \cos(5x)dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}(5x) \end{array} \right|$$

$$= -\frac{x^2}{5}\cos(5x) + \frac{2}{5}\left\{ \frac{x}{5}\operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{5}\int \operatorname{sen}(5x)\,dx \right\}$$

$$= -\frac{x^2}{5}\cos(5x) + \frac{2}{5}\left\{ \frac{x}{5}\operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{25}\cos(5x) \right\} + C.$$

(o) $$\underbrace{\int \operatorname{sen}(2x)\, e^{-x}\,dx}_{I} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{sen}(2x) = u \to 2\cos(2x)\,dx = du \\ e^{-x}\,dx = dv \to v = -e^{-x} \end{array} \right|$$

$$= -e^{-x}\operatorname{sen}(2x) + 2\int \cos(2x)\, e^{-x}\,dx$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos(2x) = u \to -2\operatorname{sen}(2x)\,dx = du \\ e^{-x}\,dx = dv \to v = -e^{-x} \end{array} \right|$$

$$= -e^{-x}\operatorname{sen}(2x) + 2\left\{ -e^{-x}\cos(2x) - 2\int \operatorname{sen}(2x)\, e^{-x}\,dx \right\}$$

$$= -e^{-x}\operatorname{sen}(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4I$$

$$\Rightarrow \quad 5I = -e^{-x}\left(\operatorname{sen}(2x) + 2\cos(2x)\right)$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{sen}(2x)\, e^{-x}\,dx = -\frac{e^{-x}}{5}\left(\operatorname{sen}(2x) + 2\cos(2x)\right).$$

(P) $$\int \log x\,dx = \left| \begin{array}{l} \log x = u \to \frac{1}{x}\,dx = du \\ dx = dv \to v = x \end{array} \right|$$

$$= x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C.$$

(9) $\int x^2 e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = u \to 2x\, dx = du \\ e^{-x} dx = dv \to v = -e^{-x} \end{array} \right|$

$= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} x = u \to dx = du \\ e^{-x} dx = dv \to v = -e^{-x} \end{array} \right|$

$= -x^2 e^{-x} + 2\left\{ -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right\}$

$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - e^{x} = -e^{-x}(1 + 2x + x^2) + C.$

Integrales de funciones racionales

$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, p, q dos polinomios

Suponemos que el grado de p es menor que el de q. De lo contrario, lo primero que hemos de hacer es la división de polinomios.

La integral se hace de diferente manera dependiendo de cómo son las raíces del denominador.

Distinguiremos varios casos:

a) Las raíces del denominador son reales y distintas.

Por ejemplo:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Se hace la descomposición en fracciones simples anterior y se integra cada una de las partes. Siempre salen logaritmos.

(r) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(3-x)}$

$$\frac{1}{(x-2)(3-x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{3-x} = \frac{A(3-x)+B(x-2)}{(x-2)(3-x)}$$

$$= \frac{(-A+B)x+3A-2B}{(x-2)(3-x)}$$

Se igualan coeficientes:

$$\left.\begin{array}{r} -A+B=0 \\ 3A-2B=1 \end{array}\right\} \to A=B$$
$$3A-2A=1 \to A=\tfrac{1}{2}=B$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{(x-2)(3-x)} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{3-x}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x-2| - \frac{1}{2}\log|3-x| + C.$$

b) Las raíces son reales pero alguna de ellas tiene multiplicidad mayor que uno. Se hace una descomposición como la anterior pero hay que añadir los términos donde la raí't se repite hasta llegar al orden de su multiplicidad. Veamos un ejemplo:

(5) $$\int \frac{5x+1}{x^3-3x+2}\,dx.$$

Calculamos las raíces del denominador por Rufini:

	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	0
1		1	2	
	1	2	0	
−2		−2		
	1	0		

Por tanto: $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$.

Hacemos la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{5x+1}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)(x-1)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\frac{x^2(A+C)+x(-A+2A+B+2C)-2A+2B+C}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\left.\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B + 2C &= 5 \\ -2A + 2B + C &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\to A = -C \\ &\left.\begin{aligned} 3A + B &= 5 \\ -3A + 2B &= 1 \end{aligned}\right\} \\ \hline &3B = 6 \to B = 2 \end{aligned}$$

$$\cancel{\to \; -3A - 3B = -15} \qquad \cancel{-3A + 2B = 1} \qquad \to 3A = 5 - 2 = 3$$

$$A = 1 \to C = -1$$

Por tanto,

$$\int \frac{5x+1}{x^3-3x+2}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log|x-1| - \frac{2}{(x-1)} - \log|x+2|$$

$$= \log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{2}{x-1} + C'.$$

c) El denominador tiene raíces complejas (supongamos que simples). Se "completan cuadrados" en el denominador y la integral resulta ser un arcotangente.

(t) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

$$x^2+2x+5=0 \to x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}.$$

Completamos cuadrados de la siguiente forma:

$$\underbrace{x^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{cuadrado} \\ \text{del } 1^{\underline{o}}}}+\underbrace{2x}_{\substack{\uparrow \\ \text{doble producto} \\ \text{del } 1^{\underline{o}} \times \text{ el } 2^{\underline{o}}}} = (x+1)^2-1$$

Por tanto:

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2-1+5 = (x+1)^2+4.$$

Así,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{4+(x+1)^2} = \int \frac{dx}{4\left(1+\frac{1}{4}(x+1)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = t \\ \frac{1}{2}dx = dt \to dx = 2\,dt \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{4}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\arctan(t) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C.$$

(μ) $\int \frac{dx}{x^2+10x+16}$

$$x^2+10x+16=0 \to x = \frac{-10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{-10 \pm 6}{2} = \begin{cases} -\frac{4}{2} = -2 \\ -8 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2+10x+16} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+8} = \frac{(A+B)x+8A+2B}{(x+2)(x+8)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 8A+2B=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} -2A-2B=0 \\ 8A+2B=1 \\ \hline 6A=1 \to A=\frac{1}{6} \to B=-\frac{1}{6} \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+16} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+8}$$

$$= \frac{1}{6}\log|x+2| - \frac{1}{6}\log|x+8|$$

$$= \frac{1}{6}\log\left|\frac{x+2}{x+8}\right| + C.$$

(ν) $\int \frac{x+2}{(x-1)(x+3)}dx$

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A-B}{(x-1)(x+3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 3A-B=2 \\ \hline 4A=3 \to A=\frac{3}{4} \end{array}\right\} \quad \frac{3}{4}+B=1 \to B = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x+3)}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{3}{4}\log|x-1| + \frac{1}{4}\log|x+3| + C.$$

(w) $$\int \frac{3x^2+2x+7}{x^2+1}\,dx$$

Como el grado del numerador es igual al del denominador, primero hacemos la división de polinomios:

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^2+2x+7 & x^2+1 \\ \cline{3-3} - & 3x^2 \qquad\quad +3 & 3 \\ \cline{1-2} & 0 \qquad 2x+10 & \end{array}$$

$$\underbrace{3x^2+2x+7}_{D} = \underbrace{3(x^2+1)}_{D\times C} + \underbrace{2x+10}_{r}$$

Por tanto,

$$\int \frac{3x^2+2x+7}{x^2+1}\,dx = \int 3\,dx + \int \frac{2x+10}{x^2+1}\,dx$$

$$= 3x + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 10\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= 3x + \log(x^2+1) + 10\arctan(x) + C.$$

(x) $$\int \frac{2x^3+9x^2+4}{x^2(x^2+4)(x-1)}\,dx$$

$$\frac{2x^3+9x^2+4}{x^2(x^2+4)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{E}{x-1}$$

$$= \frac{Ax(x^2+4)(x-1) + B(x^2+4)(x-1) + (Cx+B)\,x^2(x-1)}{x^2(x^2+4)(x-1)}$$

$$+ \frac{E\,x^2(x^2+4)}{x^2(x^2+4)(x-1)}.$$

igualar coeficientes y resolver el sistema ~~en~~ resultante.

(y) $$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-4}{x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - 4\int \frac{dx}{x^2+4x+5} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+4x+5| - 4\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$x^2+4x+5=0 \to x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2}.$$

Completamos cuadrados:

$$x^2+4x = (x+2)^2-4$$

$$x^2+4x+5 = (x+2)^2-4+5 = 1+(x+2)^2$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{1+(x+2)^2} = \arctan|x+2|.$$

(2) $$\int \frac{dx}{x^2+4x+2}$$

$$x^2+4x+2=0 \to x = \frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{8}}{2} = -2\pm\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{x^2+4x+2} = \frac{A}{x-(-2+\sqrt{2})} + \frac{B}{x-(-2-\sqrt{2})}$$

Se calculan A y B resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 0 \\ A(-2-\sqrt{2})+B(-2+\sqrt{2}) &= 1 \end{aligned}\right\} \to A=-B$$

$$A(-2-\sqrt{2}+2-\sqrt{2}) = 1$$

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \to B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x-(-2+\sqrt{2})} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x-(-2-\sqrt{2})}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\log|x-(-2+\sqrt{2})| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log|x-(-2-\sqrt{2})| + C$$

② a) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos x \, dx$

$$I = \int e^{-ax} \cos x dx = |\text{integración por partes 2 veces}|$$

$$= e^{-ax} \operatorname{sen} x - a e^{-ax} \cos x - a^2 I ;$$

$$I = \frac{1}{1+a^2} e^{-ax} (\operatorname{sen} x - a \cos x) + C$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos x dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-ax} \cos x dx$$

$$= \frac{1}{1+a^2} \lim_{b \to +\infty} \left[e^{-ax} (\operatorname{sen} x - a \cos x) \right]_0^b$$

$$= \frac{1}{1+a^2} \lim_{b \to +\infty} \left[e^{-ab} (\operatorname{sen} b - a \cos b) + a \right]$$

$$= \frac{1}{1+a^2} \cdot a = \frac{a}{1+a^2} .$$

(b) $I_n=\int_0^{+\infty} e^{-ar} r^n \, dr = \left| \begin{array}{l} r^n = u \to n r^{n-1} dr = du \\ e^{-ar} dr = dv \to v = -\frac{1}{a} e^{-ar} \end{array} \right|$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left\{ -e^{-ar} \frac{r^n}{a} \Big|_0^b + \frac{n}{a} \int_0^b r^{n-1} e^{-ar} dr \right\}$$

$$= \frac{n}{a} \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-ar} dr = \frac{n}{a} I_{n-1}$$

Por tanto, $\cancel{I_n = \frac{n}{a} \cdot \frac{n-1}{a} \cdot \frac{n-2}{a} \cdots \frac{n-(n-1)}{a} = \frac{n!}{a^{n+1}}}$

Como $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-ar} dr = \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{a} e^{-ar} \Big|_0^b = \frac{1}{a}$

nos queda,

$$I_n = \frac{n}{a} I_{n-1} = \frac{n}{a} \cdot \frac{n-1}{a} I_{n-2} = \frac{n}{a} \frac{n-1}{a} \cdots \frac{n-(n-1)}{a} \cdot I_0$$

$$= \frac{n}{a^{n+1}}.$$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = 0$ (hecho en clase)

(d) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \log x}$

$$\int \frac{dx}{x\log x} = \left| \begin{array}{l} \log x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \log|t|$$

$$= \log(|\log|x||)$$

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\log x} = \lim_{b\to+\infty} \int_{e}^{b} \frac{dx}{x\log x}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \Big[\log(|\log|x||) \Big]_{e}^{b}$$

$$= \infty \quad \text{divergente.}$$

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\log^2 x} = \left| \begin{array}{l} \log x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int_e^{\to} \begin{array}{l} x = +\infty \to t = +\infty \\ x = e \to t = 1 \end{array}$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{t}\Big|_{1}^{b} = 1 \Big].$$

(f) $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx = \Big|$ integrar por partes.. $\Big|$.

③ Derivación paramétrica de integrales.

$$\frac{d}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\,dt = f(h_2(x))h_2'(x) - f(h_1(x))h_1'(x)$$

a) $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^3} \cos t\,dt = \cos(x^3)\cdot 3x^2 - \cos(2x)\cdot 2$

b) $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{3x} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3x}\cdot 3 - \frac{1}{2x}\cdot 2$

c) Formalmente, $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dx} f(x,t)\,dt$.

En general,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,t)\,dt = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{d}{dx} f(x,t)\,dt + f(x, h_2(x))\cdot h_2'(x) - f(x, h_1(x))\,h_1'(x).}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \int_0^\infty \frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha x}\,dx = -\int_0^\infty x\,e^{-\alpha x}\,dx$$

(d) $\frac{d}{dx}\underbrace{\int_0^2 t^n\,dt}_{\text{no depende de } x.} = 0$

(e) $\frac{d}{dx}\int_0^2 x^n\,dt = \int_0^2 \frac{d}{dx} x^n\,dt = n\int_0^2 n x^{n-1}\,dt$

$= n x^{n-1}\cdot 2.$

(f) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\int_0^x v(t)dt\right) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x v(t)\,dt +$

$+ \frac{1}{x}\cdot v(x).$

(g) $\frac{d}{dx}\int_0^x\left(\int_0^t v(s)\,ds\right)dt = \int_0^x v(s)\,ds$

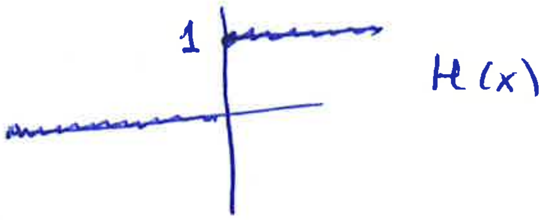
(h) $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x v(t)dt + \int_x^1 v(t)dt\right) =$

$= v(x) - v(x) = 0.$

(i) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} v(t)dt = v(x+1) - v(x).$

(4) Derivación en el sentido de las distribuciones y la distribución delta de Dirac.

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



a) $v:[-1,1] \to \mathbb{R}$ cont$^{\underline{a}}$, v' cont$^{\underline{a}}$ $v(-1)=v(1)=0.$

$$\int_{-1}^1 \underbrace{H'(x)}_{dv}\underbrace{v(x)}_{u}dx = H(x)v(x)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 H(x)v'(x)dx$$

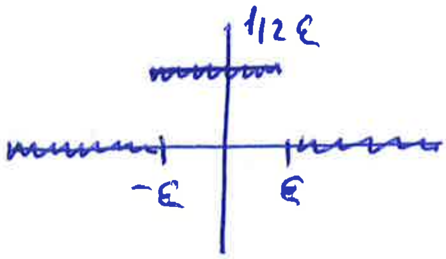
$$= H(1)\cancel{v(1)}^{0} - H(-1)\cancel{v(-1)}^{0} - \int_0^1 v'(x)dx$$

$$= -v(x)\Big|_0^1 = -\cancel{v(1)}^{0} + v(0) = \boxed{v(0)}$$

b) La "delta" de Dirac

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)\, v(x)\, dx = v(0).$$

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon}, & -\epsilon \leq x \leq \epsilon \\ 0, & |x| > \epsilon \end{cases}$$



$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)\, v(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{1}{2\epsilon}\, v(x)\, dx$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \cdot 2\epsilon\, v(c_\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} v(c_\epsilon) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{=0} v(0), \text{ pues } v \text{ es cont}^a.$$

$c_\epsilon \in (-\epsilon, \epsilon)$

↑ T^{a} V.M. Int.

Como $f_\epsilon(x) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$

y $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)\, v(x)\, dx = v(0)$

concluimos, que, en el sentido anterior, $H' \doteq \delta_0$.

5) Algunas Aplicaciones del Cálculo Integral.

a) $$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{T}{1+T^2(\omega-\omega_0)^2}$$

$$\int_{\omega_0}^{+\infty} g(\omega)d\omega = \frac{T}{\pi} \lim_{b\to+\infty} \int_{\omega_0}^{b} \frac{d\omega}{1+(T(\omega-\omega_0))^2}$$

$$= \frac{T}{\pi} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{T} \arctan(T(\omega-\omega_0))\right]_{\omega_0}^{b}$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{b\to+\infty} [\arctan(T(b-\omega_0)) - \arctan 0]$$

$$= \left| \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \to \arctan +\infty = \frac{\pi}{2}, \ \arctan 0 = 0 \right|$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}$$

$$\bar{v} = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2k\pi T}\right)^{3/2} \lim_{b\to+\infty} \int_0^b v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

Denotemos por $a = \frac{m}{2kT}$. Vamos a calcular

$$\int v^3 e^{-av^2} dv$$

$$\cancel{\int v^3 e^{-av^2} dv = \Big| v^3}$$

$$\cancel{\int x^2 e^{-ax^2} dx = \Big| x^3 = u \to 3x^2 dx = du}$$

$$= \cancel{\Big| x^2}$$

$$\int x^3 e^{-ax^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dv \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int t\, e^{-at} dt = \left| \begin{array}{l} t = u \quad \to dt = du \\ e^{-at} dt = dv \to v = -\frac{1}{a} e^{-at} \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{t}{a} e^{-at} + \frac{1}{a} \int e^{-at} dt \right\}$$

$$= -\frac{t}{2a} e^{-at} - \frac{1}{a^2} e^{-at}$$

$$= -e^{-at} \left(\frac{t}{2a} + \frac{1}{a^2} \right) = -e^{-ax^2} \left(\frac{x^2}{2a} + \frac{1}{a^2} \right).$$

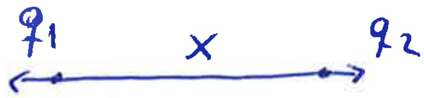
$$\int_0^b v^3 e^{-av^2} dv = -e^{-av^2} \left(\frac{v^2}{2a} + \frac{1}{a^2} \right) \Big|_0^b$$

$$= -e^{-ab^2} \left(\frac{b^2}{2a} + \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{a^2}$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b v^3 e^{-av^2} dv = \frac{1}{a^2}$$

Así, $\bar{v} = \int_0^\infty v\, f(v)\, dv = \boxed{4\pi \left(\frac{m}{2k\pi T} \right)^{3/2} \frac{(2kT)^2}{m^2}}$

c) $F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$

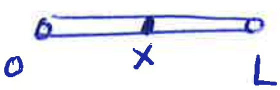


$$W = -\int_{-\infty}^{x} F(x)\,dx = -\lim_{a\to-\infty}\int_a^x \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 t^2}\,dt$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{t}\right]_a^x$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{x} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

d)



$\rho(x) = L - x \,, \quad 0 \le x \le L$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x\rho(x)\,dx}{\int_0^L \rho(x)\,dx}$$

$$\int_0^L (L-x)\,dx = \left[Lx - \frac{x^2}{2}\right]_0^L = L - \frac{L^2}{2}$$

$$\int_0^L x\,\rho(x)\,dx = \int_0^L (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3}}{L - \frac{L^2}{2}} = \frac{\frac{L}{2} - \frac{L^2}{3}}{1 - \frac{L}{2}} = \frac{\frac{3L - 2L^2}{6}}{\frac{2-L}{2}} = \boxed{\frac{1}{3}\,\frac{3L - 2L^2}{2 - L}}$$

$$I = \int_0^L \rho(x)(x - x_0)^2\,dx = \int_0^L (L - x)(x - x_0)^2\,dx$$

$$= \int_0^L (L-x)(x^2 + x_0^2 - 2xx_0)\,dx = L\int_0^L (x^2 + x_0^2 - 2xx_0)\,dx$$

$$- \int_0^L (x^3 + x x_0^2 - 2x^2 x_0)\,dx$$

$=$

$$= L\left[\frac{x^3}{3} + x_0^2 x - x^2 x_0\right]_0^L$$

$$-\cancel{L}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}x_0 - 2\frac{x^3}{3}x_0\right]_0^L$$

$$= L\left(\frac{L^3}{3} + x_0^2 L - L^2 x_0\right) - \left(\frac{L^4}{4} + \frac{L^2}{2}x_0 - \frac{2L^3}{3}x_0\right)$$